מטה-אריתמטיקה ספונטנית כצעד ראשון לקראת האלגברה הבית-ספרית[1]

שי כספי, אוניברסיטת חיפה

תקציר

מאמר זה מתאר שלב התחלתי של מחקר אורך שבו נבחנה התפתחות משיח אלגברי בלתי-פורמלי לשיח אלגברי פורמלי הנלמד בבית הספר. המשתתפים במחקר היו חמישה זוגות של תלמידים בכיתה ז'. במעקב שנמשך שנתיים וחצי, נמצא שהתלמידים הצליחו להתמודד עם בעיות אלגבריות (בעיות הכללה ובעיות עם נעלם) בעזרת שיח מטה-אריתמטי, וזאת בטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית הבית-ספרית. שיח זה התגלה כבעל תכונות מסוימות שאינן בנמצא בשיחים יומיומיים, אך הן אופייניות לשיח אלגברי פורמלי. הממצאים שהתקבלו הביאו לידי הרחבת המחקר ולהסתכלות על מטה-אריתמטיקה של תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. מתוך הממצאים עולה כי שיח אלגברי בלתי-פורמלי מופיע זמן רב לפני שמתחילה למידתה של האלגברה הפורמלית בבית הספר.

מילות מפתח: שיח מטה-אריתמטי; שיח אלגברי; התפתחות; פורמליזציה; הכללה.

מבוא

בשלושת העשורים האחרונים פורסמו מחקרים רבים שבחנו את החשיבה האלגברית של תלמידים בחטיבת הביניים. רוב המחקרים דנו בידע האלגברי של הלומד בנקודת זמן מוגדרת (בעת איסוף הנתונים) ועסקו בדרך כלל בנושא אלגברי מסוים, ללא קישורו לנושאים אלגבריים אחרים (de Lima & Tall, 2008; Stacey & MacGregor, 1999). מחקרים אלה התרכזו לרוב באלגברה פורמלית המבוטאת בעזרת סמלים אלגבריים (כגון אותיות).

המחקרים המעטים שהגדירו את עצמם כ"מחקרי אורך" דנו בשאלה "מה מתפתח בחשיבה האלגברית?" ולא עסקו בשאלה איך מתרחשת התפתחות זו (Becker & Rivera, 2004). אמנם מחקרי

---

[1] המאמר הנוכחי הוא גרסה מתורגמת ומקוצרת של המאמר: Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal Research, 51-52*, 45-65.

אורך אלה שבוצעו בעיקר בבתי-ספר יסודיים, עקבו אחרי התפתחותה של אלגברה בלתי-פורמלית, אך המעקב המתואר בהם הסתיים בדרך כלל עם הצגתה של האלגברה הפורמלית בכיתה (Radford, 2012). יתרה מזו, תשומת לב מועטה בלבד ניתנה בהם לשאלת יחסי הגומלין בין השיח הפורמלי ובין השיח הבלתי-פורמלי במהלך למידת האלגברה הפורמלית בבית הספר. המחקר, ששלביו הראשונים מוצגים במאמר זה, מבקש למלא את החסר. לשם כך אומצה "הגישה הקומוגניטיבית" (Sfard, 2008),[2] שפותחה במיוחד לצורך ניתוח השיח המתמטי ולמעקב אחרי התפתחותו.

1. רקע תאורטי

לפי הגישה הקומוגניטיבית יחידת הניתוח היא שיח. שיח מוגדר כדרך תקשורתית מסוימת, בין-אישית או פנימית המתנהלת לפי כללים ייחודיים. שיח נתון מחלק את בני האדם לאלה שמסוגלים להשתתף בו ולאלה שאין להם גישה אליו. למשל תלמידים הלומדים מתמטיקה במקומות שונים בעולם אמורים להשתתף באותו השיח הנקרא "מתמטי", וזאת על אף שהם דוברים שפות שונות. בשיח המתמטי ישנם תת-שיחים רבים, לדוגמה שיח אלגברי, שיח גאומטרי ועוד. הגישה התקשורתית מגדירה ארבעה מאפיינים ייחודיים לשיח המתמטי:

- שיח נחשב למתמטי אם הוא כולל **מילים מתמטיות** שסביבן מאורגן השיח.
- **מתווכים חזותיים** הם עצמים סימבוליים (למשל גרף, נוסחה או ביטוי אלגברי) שבעזרתם יכולים המשתתפים בשיח המתמטי לזהות את נושאי השיח ולנהל בהתאם את הפעילות התקשורתית.
- **נרטיב** הוא כל טקסט מדובר או כתוב המנוסח כתיאור של עצמים, כתיאור של קשרים בין עצמים או כתיאור פעולות על עצמים. משתתפים שונים בשיח עשויים לאמץ נרטיבים שסווגו כ"נכונים" על-ידי הקהילייה המתמטית, או לדחות כאלה שסווגו על-ידי ה כ"לא נכונים". נרטיבים מתמטיים עשויים להשתייך לאחת משתי הרמות הבאות: (1) רמת *העצם* – הכוללת חוקים מתמטיים (למשל, $2+5=7$) או (2) רמת *העל*– הכוללת חוקים המגדירים את השיח (למשל הוכחה של טענה מתמטית).
- **רוטינות** הן דפוסי שיח החוזרים על עצמם במהלך הפעילות התקשורתית של המשתתפים.

בפרק זה אגדיר את האלגברה הבית-ספרית ואציע מודל המתאר את התפתחותו של השיח האלגברי.

1.1. אלגברה אלמנטרית כמטה-אריתמטיקה

אלגברה בית-ספרית (אלמנטרית) היא מטה-שיח של האריתמטיקה (Sfard, 2008), כלומר שיח על שיח מספרי. במסגרתו של שיח מיוחד זה עוסקים בשני טיפוסים של משימות מטה-אריתמטיות:

1. הכללות, כלומר זיהוי דפוסים מספריים. באלגברה פורמלית מציגים דפוסים כאלה כשוויונות

---

[2] **קומוגניציה** (*commognition*) הוא מונח המקיף חשיבה (קוגניציה של הפרט) ותקשורת בין-אישית. מונח זה נוצר מהכלאה של המילים "קוגניציה" ו"תקשורת" והוא בא להדגיש כי חשיבה ותקשורת בין-אישית הן התגלמויות שונות של אותה תופעה.

סימבוליים, כגון $a(b+c)=ab+ac$. שוויון זה הוא קיצור של המשפט המטה-אריתמטי: "כדי לכפול מספר בסכום של שני מספרים אחרים, ניתן לכפול כל אחד משני מספרים אחרים אלה במספר הראשון, ואז לחבר את התוצאות".

2. שאלות עם נעלם, כלומר שאלות שעוסקות במספר בלתי ידוע שמשמש בביצוע חישובי שתוצאתו ידועה. טיפוס זה של משימות מתואר בשפה המודרנית כפתרון משוואות. ואכן, משוואות כגון $2x+1=13$ הן שאלות מטה-אריתמטיות – שאלות על תהליכים מספריים. במקרה זה השאלה היא: "מהו המספר, שאם נכפיל אותו ב-2, ונחבר 1 למכפלה, נקבל 13?".

שתי הדוגמאות שלעיל נכתבו באמצעות סמלים מיוחדים המזוהים על-פי רוב כסממן הבולט של האלגברה. ואולם לפי הגדרת האלגברה שניתנה לעיל (ועיקריה מקובלים על היסטוריונים ופילוסופים של המתמטיקה), הסימול הפורמלי שהומצא רק במאה השבע-עשרה אינו תכונה הכרחית של שיח אלגברי. את גישה זו אימצו כמה חוקרים בחינוך המתמטי (Sfard, 1995; Radford, Bardini, & Sabena, 2007; Zazkis & Lijedahl, 2002). ובכל זאת, לשיח האלגברי הסימבולי יש שלוש תכונות בולטות המעניקות לו עמדת יתרון על פני השיח הבלתי-פורמלי:

1. **חד-משמעיות** – לביטוי מסוים בשיח ניתנת פרשנות אחת ויחידה.
2. **סטנדרטיזציה** – כל המשתתפים בשיח פועלים לפי אותם חוקים תקשורתיים.
3. **דחיסות** – טענה מתמטית ארוכה הופכת לביטוי תמציתי הנתון למניפולציות אלגבריות.

כך למשל את התיאור המילולי הארוך "מכפלת הפרשם של שני מספרים a ו-b בסכומם של שני מספרים אלה", נוכל לרשום על-ידי הביטוי הדחוס והחד-משמעי $(a-b)\cdot(a+b)$, שעליו מפעילים הדוברים את אותם החוקים התקשורתיים. החד-משמעיות מושגת באמצעות **רגולציה** – כינונם של חוקי שיח מפורשים בעלי כללי תחביר עקביים וקפדניים (כגון ביצוע תקין של אופרציות אלגבריות ומעבר לביטוי השקול a^2-b^2).

הדחיסות מושגת הן באמצעות ראיפיקציה והן באמצעות סימול: **ראיפיקציה** היא החלפת הדיבור על *תהליך* חישובי בדיבור על *עצמים* שהם תוצאת החישוב (למשל במקום לתאר את הביטוי $x+3$ *כתהליך* – "מחברים את x ו-3", אפשר לנסחו *כעצם* – "הסכום של x ו-3"); **סימול** הוא החלפת שמות עצם, פרדיקטים[3] (predicates) ופעלים באידאוגרפים. בדומה למילים, אידאוגרפים הם סמלים העוסקים בעצמים או בפעולות. אולם בשונה ממילים, האידאוגרפים אינם קשורים קשר הדוק לצלילים מסוימים, למשל האידאוגרף "x" שבעזרתו נהוג לסמן משתנים או נעלמים במתמטיקה. תכונות השיח הפורמלי (חד-משמעיות, סטנדרטיזציה ודחיסות) והשיטות למימושן (רגולציה, ראיפיקציה וסימול) מספקות את "תהליך הפורמליזציה של השיח האלגברי", כלומר את התהליך ההדרגתי שבו נוצרת

---

[3] פרדיקט הוא פונקציה שמקבלת משתנה אחד או מספר משתנים ומחזירה ערך אמת או שקר. למשל, אם P הוא פרדיקט כלשהו, אז פירוש הפסוק $\forall x P(x)$ הוא: "לכל x מתקיים P(x)".

האלגברה הפורמלית.

1.2. התפתחותו של שיח אלגברי

התפתחותו ההיסטורית של כל שיח מתמטי התרחשה על-ידי פורמליזציה של שיחי-העל שלו והכרה בהם כחלק מן השיח המתמטי עצמו (Sfard, 2008). אפשר לפרק כל שיח מתמטי נתון לשכבות הירכיות, כשכל שכבה במבנה כזה (פרט לראשונה) היא שיח-על של השיח המכונן את השכבה שמתחתיה. הירכיה זו שאפשר לראותה בקלות יחסית, "מסגירה" את התפתחותו של השיח, כשסדר השכבות משקף את סדר ההתפתחות ההיסטורית. ואמנם אי אפשר לחשוב על מטה-שיח הנוצר לפני השיח עצמו. המודל ההירכי כשיוצג במפורש, עשוי לשחק תפקיד גם בחקר של למידת האלגברה. השכבה התחתונה אינה אלא השיח המטה-אריתמטי שהתפתח התפתחות ספונטנית, כלומר מחוץ להקשר הוראתי מפורש (Daniels, 2007).[4] נראה כי המודל מלמד על מסלול שהלומד צריך לעבור כדי להבטיח את למידתה של האלגברה. הנימוק לטענה זו ברור אף הוא: אם כל שכבה בהירכיה היא שיח-על של השיח בשכבה שמתחתיו, הרי שהצגה של שכבה חדשה בטרם שולט התלמיד בשכבה שמתחתיה, נושאת בחובה סיכון שלתלמיד לא יהיו אמצעים וחומרים לבניית השיח החדש.

בטבלה 1 מוצג מודל ראשוני של התפתחות האלגברה הנשען על מודל קודם שהציגו ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994). בניית המודל נעשתה בהתאם להבנתי את השיח האלגברי והקשרים הפנימיים שלו, תוך הישענות על שני מקורות: מחקר העוסק בהתפתחותה ההיסטורית של האלגברה וכן המחקר העוסק בלמידתה. אחד מיעדי המחקר הנוכחי היה לאושש את הסכֵמה, וכן לתרום להמשך בנייתה ועידונה (למשל בהשלמת התאים הריקים שבה). שורות המודל מייצגות רמות עולות של מורכבות. מעברים מרמה אחת לרמה העוקבת לה הם אבני-דרך התפתחותיות: כל רמה חדשה מביאה עמה שינוי בדרך השימוש במילים ובמתווכים קיימים ועל כן גם בכמה מחוקי-העל של השיח. הרמות המוצגות במודל הן חלק מתמונה רחבה יותר: לפניהן שכבה דומה ובה יש רמות נמוכות יותר של שיח אריתמטי, ועוקבות להן מספר שכבות ברמות גבוהות, כגון אלגברה ליניארית או אלגברה מופשטת, שכל אחת מהן היא מטה-שיח ייחודי של האלגברה האלמנטרית (רמות קצה אלה אינן מופיעות בטבלה 1).

שתי העמודות המרכזיות מציגות גרסה בלתי-פורמלית ופורמלית של השיח. הרמות התואמות של השיח הבלתי-פורמלי והפורמלי הועמדו זו לצד זו כיוון שאפשר לזהות את השיח בחצי השמאלי של השורה כגרסה פורמלית של השיח בחצי הימני שלה, ולא מפני שהן מתפתחות בו בזמן או בסמיכות האחת לשנייה.

---

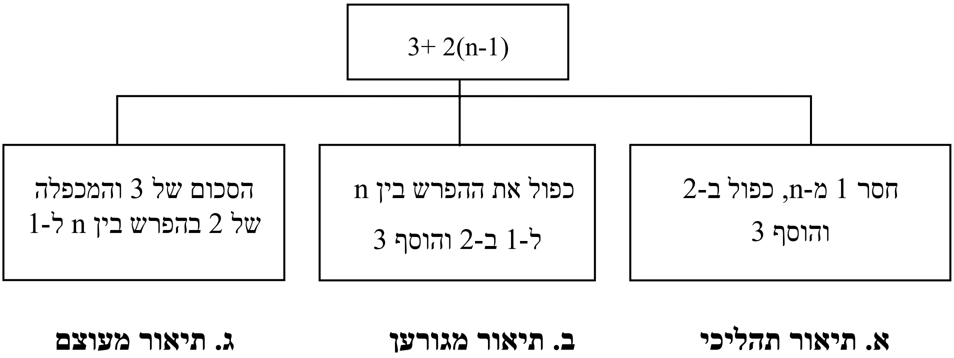
[4] אני משתמש במילה "ספונטני" בדרך שבה היא שימשה את פיאז'ה, ויגוצקי וממשיכי דרכם. צמיחה ספונטנית מתרחשת בלי כוונה מפורשת ובלי מאמץ הוראתי מכוון. עבור פיאז'ה, הצמיחה מתרחשת הודות למבנה הביולוגי האנושי. עבור ויגוצקי, הצמיחה מתרחשת במהלך אינטראקציות יומיומיות עם הסביבה האנושית והלא-אנושית, כשההשפעה האנושית במרכז (כדי לבדל את עצמו מהדטרמיניזם הביולוגי של פיאז'ה, החליף ויגוצקי את ה"ספונטני" ב"יומיומי"). למשל, ויגוצקי דן בהתפתחות ספונטנית של מושגים, ורואה במושגים ספונטניים "ככאלה שנרכשו על-ידי הילד מחוץ להקשר הוראתי מפורש" (Daniels, 2007, pp. 310-311). השימוש שלי במילה "ספונטניות" דומה להגדרתו של ויגוצקי יותר מהגדרתו של פיאז'ה.

טבלה 1: מודל של התפתחות השיח האלגברי.

רמה/משימה		**בלתי-פורמלי**				**פורמלי**			
רמה	**משימה**	**מסמנים של עצמים והשימוש בהם**		**רוטינות**		**מסמנים של עצמים והשימוש בהם**		**רוטינות**	
		מסמנים מילוליים	**אידאוגרפים (מתווכים חזותיים)**	**פנייה (שאלה, בקשה)**	**הליך**	**מסמנים מילוליים**	**אידאוגרפים (מתווכים חזותיים)**	**פנייה (שאלה, בקשה)**	**הליך**
רמה 1 תהליכית	**מציאת נעלם**	**שם עצם בשיח יומיומי** המתפקד כמספר **לא-ידוע**	**צורות גאומטריות** המתפקדות **כשומרי מקום**	"מה היה <שם העצם>?"	**שחזור**, סדרת פעולות מספריות הפוכות	נעלם	**אות כנעלם**	משוואות **"אריתמטיות"** שבהן הנעלם באגף אחד בלבד	**שחזור**, סדרת פעולות מספריות הפוכות
	הכללת קשרים	**שם עצם בשיח יומיומי** המתפקד כמספר **נתון**		כיצד תקבל איבר מסוים של הדפוס?	**סדרת פעולות** עם סימן שוויון המשמש להוראה: **"בצע"** תיאורים **רקורסיביים**.	נתון	אות המתפקדת כנתון (פרמטר)		
רמה 2 מגורענת	**מציאת נעלם**	**פסוקית שם עצם מורכבת** המוצגת בצורה **תהליכית**, כתיאור של **חישוב** מסוים				משוואה	**אות** המתפקדת **כנתון (פרמטר)** **ביטוי מילולי מורכב** המתפקד כתיאור של תהליך	**P(x) = n** כאשר p(x) הוא ביטוי מילולי מורכב (למשל, 3x+7) ו- n הוא מספר מסוים	**פעולה על שני האגפים** אלגוריתם
	הכללת קשרים				**תיאורים מגורענים** של חישובים מורכבים. **רקורסיה מקוצרת**	נוסחה (ביטוי)	**ביטוי מילולי מורכב** המתפקד **כתיאור של תהליך**		**נוסחאות מורכבות** כתיאורים של **חישובים**
רמה 3 מעוצמת	**מציאת נעלם**	**פסוקית שם עצם מורכבת** המוצגת בצורה **מעוצמת**, כתיאור **תוצאה** של חישוב מסוים				פרמטר (מחליף נתון)	**ביטוי מילולי מורכב** המתפקד **כעצם** (מספר מסוים)	**P(x) =R(x)** כאשר p(x) ו-R(x) הם ביטויים מילוליים מורכבים	פתרון משוואות **אלגוריתם סימבולי**
	הכללת קשרים			תאר חוק עבור יצירת **הדפוס**	חיפוש אחר תיאור **רקורסיבי**			**מודל** תופעה חקור את התופעה	**נוסחאות מורכבות** כתיאורים של **תוצאות** חישוביות

ברמה הראשונה – **רמה תהליכית** של השיח האלגברי, ההתמקדות של הדוברים היא בחישובים מספריים. בשלב זה החישובים מתבצעים בעיקר במילים, והמאפיין הבולט של התיאורים המילוליים (או סמלים אם יש כאלה) של חישובים אלה הוא שהפעולות רשומות בסדר שבו הן מבוצעות (ראה דוגמה באיור 1א). בעיות טיפוסיות ברמה זו כוללות משוואה אריתמטית מהדרך $ax + b = c$, דרך שאפשר לפותרה ב"שחזור" – הפיכת הפעולות שבוצעו על הנעלם כדי לקבל את התוצאה הרשומה באגף ימין. כפי שדיווחו פילוי ורוג'נו (Filloy & Rojano, 1989), ילדים מסוגלים לבצע חישוב "הפוך" כזה גם בלי שמישהו לימד אותם טכניקה זאת. הרמה התהליכית מתאפיינת גם בשימוש תדיר במילים מיוחדות עבור תוצאות ביניים. כך למשל כאשר תלמיד מתאר את הביטוי $3x + 5$: "שלוש

כפול משתנה שווה משהו. המשהו הזה ועוד 5". התלמיד משתמש במילה "משהו" כתוצאת ביניים של התהליך החישובי.



איור 1: שלוש רמות של תיאורים להליך חישובי.

ברמה השנייה – **רמה מגורענת**, ההתמקדות היא עדיין בחישובים מספריים, אך התיאורים של תהליכים אלה אינם תואמים אחד לאחד את סדרת הפעולות שהתבצעו במהלך החישובים עצמם. כך למשל באיור 1ב הדובר מבצע תחילה פעולת כפל, על אף שפעולה זו אינה כתובה ראשונה. כמו כן פעולת החיסור ("חסר 1 מ-n") הוחלפה בפסוקית שם עצם ("ההפרש בין n ל-1"). התוצאה המשולבת של שתי החלפות אלה היא ראיפיקציה של תהליך החישוב ו"הַזָרה" שלו – ביטול אזכורו של המבצע האנושי. בשל שינויים אלה הפסוקיות המתקבלות הן מעוצמות, כלומר מתארות עצמים ולא פעולות. אפשר לומר שבזכות הפסוקיות האלה, התיאור של התהליך הופך ל"מגורען": פסוקיות עצם אלה הן בבחינת קיצורים של פעולות בסיסיות, והן קושרות חלקים של שרשרת פעולות ארוכה ל"חרוזים" או "גרעינים".

המראה החיצוני של שרשרת חישובים זו אינו שונה בהרבה מהמראה של שיח אלגברי ברמה הראשונה: גם כאן מופיעה סדרת פעולות חישוביות, אלא שהודות להחלפת החישוב בתוצאתו, אין צורך להפסיק את הסדרה בכל מקרה של חישוב עזר. עבור תלמיד המצוי ברמה זו, לתוצאות ביניים אלה ישנו קיום ארעי בלבד. גם אם תוצאות אלה מבוטאות בסמלים, מותר להן להופיע בתהליך של חישובים, אך הן אינן מספקות תשובות סופיות לגיטימיות לבעיות אלגבריות. תופעה זו עשויה להסביר למשל את חוסר היכולת של תלמידים לפרש ביטוי אלגברי כגון $a + b$ כעצם (ראה Collis, 1975) או לחלץ את הנעלם במשוואה הפרמטרית $(k-1)x = 3$ על-ידי חילוק שני אגפי המשוואה בביטוי המורכב $k-1$ (Sfard & Linchevsky, 1994).

הרמה השלישית **והמעוצמת** של האלגברה היא זו של המשתתפים המומחים בשיח האלגברי. ברמה זו המעמד של פסוקית שם עצם מורכבת או של ביטוי אלגברי מורכב אינו שונה מזה של מספר. מבנה מורכב זה עשוי להיות חלק מפעולה מספרית כלשהי ויכול להופיע כתחליף למספר בכל היגד העוסק

במספרים. השימוש בביטויים אלגבריים, מילוליים או סימבוליים, נעשה כעת על-ידי קשרים בין עצמים שבהם אינו מעורב הגורם האנושי: "מכפלה של סכום שני מספרים וההפרש שלהם שווה להפרש שבין הריבועים של מספרים אלה". לעומתו, תיאור "מגורען" המערב את המבצע האנושי עשוי להישמע כך: "במקום לכפול את הסכום של שני מספרים בהפרש שלהם, אפשר להחסיר את הריבוע של המספר השני מהריבוע של הראשון" (ראה גם איור 1ג). ברמה המעוצמת, ביטויים אלגבריים נחשבים כמציינים עצם מפותח ועצמאי.

2. שיטת המחקר

מחקר האורך המתואר עוקב אחרי קבוצה של לומדי אלגברה כדי למפות את התפתחות השיח האלגברי שלהם. במהלך שנתיים וחצי התבקשו התלמידים לפתור בעיות אלגבריות העוסקות בהכללה ובפתרון משוואות, כך שרמת מורכבותן עלתה עם הזמן.

איסוף הנתונים החל עם כניסתם של התלמידים לכיתה ז', לפני שנחשפו לאלגברה הפורמלית הבית-ספרית. מטרתי הייתה ללמוד על מאפייניו של השיח המטה-אריתמטי (הבלתי-פורמלי) הספונטני[5] שלהם. בהמשך עקבתי בדקדקנות אחרי התפתחותו של שיח זה בזמן שהתלמידים למדו אלגברה פורמלית בבית הספר.

2.1. שאלות המחקר

שתי השאלות המרכזיות שהנחו מחקר זה:

1. מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי של תלמידים בכיתה ז', בטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי בכיתה?
2. כיצד התפתח השיח האלגברי של תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה בכיתה? בייחוד האם השיח הבלתי-פורמלי והשיח הפורמלי מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

המאמר הנוכחי מתמקד בשלב ההתחלתי של המחקר, לפני שהתלמידים נחשפו חשיפה רשמית לאלגברה פורמלית בית-ספרית. לפיכך במאמר זה אדון בשאלת המחקר הראשונה בלבד.[6] כפי שאסביר בהמשך, ממצאי המחקר עודדו אותי להרחיב את אוכלוסיית המשתתפים ולכלול תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. מהלך זה הביא גם לידי הרחבת שאלת המחקר הראשונה והיא תנוסח כעת ניסוח כללי יותר: **מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?**

---

[5] המילה "ספונטני" מציינת כי התלמידים התבקשו להתמודד עם פתרון משימות אלגבריות בטרם הפכה האלגברה לאובייקט למידה מוצהר בבית הספר.

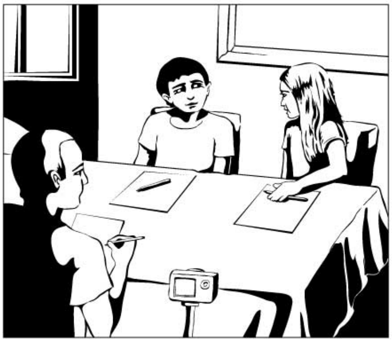
[6] תשובה על השאלה השנייה מופיעה בתוך כספי, 2014.

2.2. המשתתפים והליך איסוף הנתונים

לצורך המעקב אחרי התפתחותו של השיח האלגברי נבחרו חמישה זוגות תלמידים בכיתה ז'. לתלמידים אלה יש מאפיינים דומים: הם תושבי עיר גדולה בצפון הארץ, בעלי רמת הישגים ממוצעת או מעל הממוצע במתמטיקה ורקע סוציו-אקונומי בינוני. התלמידים השתייכו לאותו בית ספר. אף שלמדו מתמטיקה בשתי כיתות נפרדות ואצל מורות אחרות, למדו המשתתפים לפי תכנית לימודים זהה והשתמשו באותם ספרי לימוד. בחירתם למחקר התבצעה על-פי שלושה קריטריונים: גישה חיובית למתמטיקה, יכולת גבוהה לבטא את עצמם ומוכנות להשתתף במחקר מתחילתו ועד סופו. כדי שיוכלו ליהנות בחברת בני-זוגם, חולקו התלמידים לזוגות על-פי בחירתם האישית.

במהלך שנתיים וחצי מדי שישה חודשים התקיים סבב ראיונות שבו נפגש כל זוג תלמידים עם החוקר (ראה איור 2). כל סבב ראיונות ארך כחודש וחצי וכלל חמישה או שישה מפגשים עם כל זוג. אורכו של כל מפגש היה בין 60 ל-90 דקות. הסבב הראשון החל בתחילת כיתה ז', בשלב שבו התלמידים טרם נחשפו לאלגברה הבית-ספרית, ואילו הסבב החמישי והאחרון התקיים באמצע שנת הלימודים של כיתה ט'. במהלך הראיונות שצולמו במלואם, האזנתי לשיחות שקיימו המשתתפים בעת התמודדותם עם המשימות, ובמידת הצורך שאלתי אותם שאלות הבהרה. תמיד הקפדתי להימנע מכל התערבות הוראתית ישירה, כך שהצגת האלגברה ועקרונותיה נשארו בידי המורות המלמדות בכיתה.

איור 2: ריאיון עם זוג משתתפים: התלמידים ממוקמים מול המצלמה והחוקר יושב מולם[7].



לאחר ניתוח ראשוני של הממצאים שהתבצע לאחר סיום הסבב הראשון, הבנתי שאני זקוק לעוד נתונים כדי להכריע בין מספר פרשנויות אפשריות של הנתונים שנאספו עד לאותו שלב. התברר לי שהיה כדאי "לחפור" עמוק ומוקדם, ולכן החלטתי לבדוק שיח זה גם בקרב תלמידים צעירים יותר. לשם כך קיימתי עוד ראיונות עם כמה זוגות תלמידים בכיתה ה' בעלי רקע סוציו-אקונומי דומה לרקע של התלמידים בכיתה ז'. במאמר זה מוצגות תוצאותיו של סבב הראיונות הראשון שהתקיים בקרב המשתתפים הראשיים של המחקר (להלן "הבוגרים" – תלמידי כיתה ז' באותה עת) והן משוות לתוצאות שהתקבלו אצל התלמידים בכיתה ה' (להלן "הצעירים").

---

[7] את האיור איירה אמי ספרד, בתה של פרופ' אנה ספרד.

המחקר הנוכחי הוא חקר מקרה (או חקר מספר מקרים – multiple case studies) שבו ביקשתי לבחון בין השאר מה קורה לשיח האריתמטי הבלתי-פורמלי של תלמיד, כאשר הוא פוגש את השיח האלגברי הפורמלי בבית הספר. ברור שדרך ההוראה בכיתה עשויה להשפיע על תוצאותיו של מפגש זה. עם זה כמו בכל חקר מקרה, נהוג לקבל את המקרה כפי שהוא ולהראות מה עשוי לקרות ולא מה קורה תמיד. בפרק הדיון אדון בשאלה מה מתוך הממצאים שאציג אפשר להכליל מעבר למקרה הספציפי שנחקר כאן.

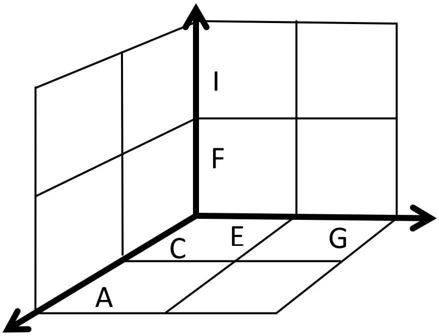
2.3. משימות המחקר

השאלון שבו השתמשתי בראיונות הוא מאגר משימות המייצגות את הקטגוריות הבאות (ראה איור 3):

1. **InF** מול **For**: המשימה מנוסחת ניסוח בלתי-פורמלי (Informal) (לא מכילה אותיות אלגבריות) או ניסוח פורמלי (Formal) (מכילה אותיות אלגבריות). הבחנה זו מאפשרת לקבוע את יחסי הגומלין שבין השיח הבלתי-פורמלי לשיח הפורמלי.
2. **Gen** מול **Equ**: המשימה מזמנת הכללה (Generalization) או מציאת נעלמים (Equation).
3. **Abs** מול **Con:** המשימה מוצגת בהקשר מופשט (Abstract) (למשל סדרת מספרים) או בהקשר מוחשי (Concrete) (למשל, מציגה סדרת צורות או מתארת מצב מחיי היומיום).

אפשר לחלק כל קטגוריה לחלוקה פנימית. לדוגמה במקרה של משוואות נכללו משימות עם נתונים מספריים (**Num**) וגם משימות פרמטריות (**Par**). טבלה 2 מציגה דוגמה למשימה מטיפוס <InF, Gen, Abs>.

איור 3: טיפוסי משימות המחקר



2.4. ממצאים

הממצאים שאציג במאמר זה לקוחים משני אוספים: בשלב הראשון אציג תשובות שניסחו התלמידים הבוגרים בסבב הראיונות הראשון (שלב פרה-אלגברי), עבור משימת ההכללה המוצגת בטבלה 2.[8] בשלב הבא אציג ממצאים שנאספו בקרב התלמידים הצעירים עבור אותה משימה. כאמור, סדר זה של הצגת הנתונים משקף את הסדר שבו התרחשו הדברים במהלך איסוף הנתונים.

---

[8] משימת הכללה זו הייתה המשימה הראשונה שהוצגה לפני משתתפי המחקר (בתחילת סבב 1), ועל כן נבחרה לצורך הדגמת ניתוח השיח המטה-אריתמטי שלהם. כמו כן המשימה הניבה ממצאים עשירים במיוחד שנתמכו על-ידי ממצאים של משימות נוספות.

טבלה 2: משימת הכללה

לפניכם סדרה של מספרים: . . . ,4, 7, 10, 13, 16.

<InF, Gen, Abs>

א. איזה מספר נמצא במקום ה-20 בסדרה?

ב. איזה מספר נמצא במקום ה-50 בסדרה? איזה מספר נמצא במקום ה-75 בסדרה?

ג. נסחו כלל שבאמצעותו ניתן לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.

2.5. שיטת ניתוח הנתונים

כפי שהוסבר בסעיף 1.1., לתהליך הפורמליזציה של השיח האלגברי יש שלושה תת-תהליכים: סימול, עיצום ורגולציה. במאמר זה אתמקד בסימול ובעיצום כפי שהם באים לידי ביטוי בתשובות התלמידים עבור משימת ההכללה שהוצגה לעיל.

מטרתי **בהיבט הסימול** היא לבחון באילו אמצעי שיח השתמשו התלמידים כדי לבטא משתנים. בסעיף ג' של משימת ההכללה התבקשו התלמידים לנסח איבר כללי של סדרה, כלומר לבצע שינוי לשוני המכונה **האחדה** (saming). אדם מבצע האחדה של ישויות כלשהן (נניח של כל המספרים הטבעיים) לישות אחת אם בדיבורו הוא יכול להחליף אותן במסמן יחיד (לדוגמה, את ... ,1, 2, 3 הוא יכול להחליף במילה "מספר" או באידאוגרף x). מטרת ההחלפה היא להפוך אינסוף ביטויים אריתמטיים בעלי מבנה דומה (למשל: הריבוע של 3, הריבוע של 11, וכדומה) לביטוי יחיד (הריבוע של מספר, x^2). המסמן המאוחד נקרא "משתנה".

בכל תשובה שהציגו התלמידים, בחנתי תחילה את *המסמנים* שבהם השתמשו ביוזמתם עבור אותם גדלים המופיעים בבעיה שבעיני משתתף מנוסה נחשבים למשתנים (למשל, האיבר בסדרה ומיקומו) וכן עבור פרמטרים (או קבועים, כגון האיבר הראשון והפרש הסדרה). בשלב הבא בחנתי את *מקורות המסמנים האלה*, ושאלתי את עצמי באשר לסיבה שלפיה הם נחשבו בעיני הלומד מתאימים לתפקיד שנבחרו אליו.

בהמשך אבקש לבחון גם את **מידת העיצום** בשיח של המשתתפים. לשם כך אבחן מספר סממנים המובאים בטבלה 3. מכלול סממנים אלה בשיח שופכים אור על השלב הנוכחי בדרך לשיח אלגברי מעוצם, המתאפיין ביכולתו של התלמיד לעסוק בביטויים אלגבריים הן כתהליך חישובי ("תהליך") והן כתוצאת החישוב של תהליך זה ("עצם"). **ראייה דואלית תהליכית/מעוצמת** מספקת תכונה מובהקת של שיח אלגברי תקני והיא עדות לשיח מעוצם.

לסיום חלק זה, אדגיש כי הצגת הממצאים כוללת אפיון השיח של כל קבוצת תלמידים (בוגרים וצעירים) ולא של כל משתתף בודד או אפילו של זוג משתתפים.

טבלה 3: סממנים של עיצום בשיח של המשתתפים.

היבטים נבחנים	שאלות מנחות והסבר לחשיבותן	כיצד אשיב על השאלות?
דרכי הצגה לפעולות	**מה הם המסמנים של פעולות שבהם השתמשו התלמידים?**	אזהה את הנשוא הדקדוקי של ההיגד – פעלים ופעולות בשיח של התלמידים.
	מהו חלקו של המבצע האנושי במהלך הפעולה? פעולות שאנשים עושים (למשל "כפלתי") משקפות תהליכיות בשיח, ואילו פעולות הַזָרה שאנשים אינם עושים (כגון "כָּפוּל") הן שלב בדרך לשיח מעוצם.	אזהה את הנושא הדקדוקי של ההיגד – אדם או עצם מתמטי.
דרכי הצגה לתוצאות של פעולות	**באילו מסמנים השתמשו התלמידים עבור תוצאות של פעולות?** במשפט "מחברים את 3 ו-5 ואת התוצאה כופלים ב-2", המילה "תוצאה" היא תוצאת ביניים של החישוב (תוצאת הביניים היא המספר 8). לכאורה תוצאת ביניים, בהיותה עצם, זקוקה להצגה של עצם מציין חדש (למשל "התוצאה"). אולם בשיח אלגברי מפותח נהוג לטפל בתוצאה זו בשתי שיטות: **1. הצגה על-ידי פסוקית פעולה**: הנכונות של תלמיד לוותר על מילה מיוחדת עבור תוצאת ביניים, פירושה שהוא רואה בביטוי מורכב לא רק פעולה, אלא גם תוצאה שלה. למשל, אם תלמיד אומר: "3 כפול 2 ועוד 7", אז הביטוי "3 כפול 2" מתאר פעולה וגם תוצאה שאליה אפשר לחבר מיד את ה-7. במאמר זה אכנה פסוקיות מיוחדות אלה בשם "פסוקיות פעולה" – פסוקי משנֶה שאינם מכילים תוצאות ביניים ושמתארים תהליך של הזרה. בשיחים מתמטיים מפותחים משמשות פסוקיות פעולה אלה גם כפסוקיות שם עצם. להופעתן של פסוקיות פעולה בשיח יש חשיבות רבה, שכן הן משקפות שלב בדרך לגרעון ובהמשך תובלנה לעיצום. **2. הצגה על-ידי נומינליזציה**: עוד פתרון לבעיית תוצאת הביניים הוא שימוש ב"נומינליזציה" – תהליך שבו מילים המתארות תהליכים (פעלים כגון "חיברתי" או שמות פעולה כגון "לחבר") הופכות לשמות עצם מופשטים. למשל, בפסוקית "הסכום של a ו-b", שם העצם "סכום" הוא נומינליזציה של הפועל "סָכמתי" או של שם הפעולה "לסכום". הופעתו של שם עצם מטיפוס זה הוא סממן של גרעון.	אזהה מופעים של תוצאות ביניים, של פסוקיות פעולה, של פסוקיות עצם ומסמנים של נומינליזציה בתשובות של התלמידים.

היבטים נבחנים	שאלות מנחות והסבר לחשיבותן	כיצד אשיב על השאלות?
סדר הצגת הפעולות	**האם סדר הפעולות בתשובת התלמיד תואם את סדר הפעולות שבוצעו בעת החישוב?** הופעתה של פסוקית (כתובה או נאמרת) המציגה פעולות בסדר השונה מסדר ביצוען גם היא סממן לגרעון.	אבחן את סדר הפעולות המופיעות בתשובת התלמיד.

3. ממצאים - שיח אלגברי בלתי-פורמלי של התלמידים בכיתה ז׳

בסעיף זה אדון באופן שבו נבנו פתרונות התלמידים הבוגרים עבור משימת ההכללה שהוצגה בטבלה 2.

3.1. דוגמאות - תיאור כללי

כדי להדגים את השיטה שבה ניתחתי את הנתונים, איעזר בתשובותיהן של זוג תלמידות בכיתה ז' – תמר וחנה, עבור סעיף ג' של המשימה. תחילה התבקשו התלמידות לנסח את הכללים שלהן בכתב ולאחר מכן בעל-פה (ראה טבלה 4). העמודה השמאלית מציגה את התרגומים הסימבוליים של כללים אלה, כפי שכתב אותם החוקר. תרגומים אלה נבנו בהתאם לניתוח מסמני העצם המוצג בטבלאות 5a ו-5b.

טבלה 4: כללים של תלמידים בכיתה ז' – תמר וחנה

שם	כלל כתוב	כלל נאמר	כלל שקול
תמר	כלל: מקום × חוקיות הסדרה + 1. □×3+1	מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד אחד. משהו כפול 3 ועוד 1.	$a_n = n \cdot 3 + 1$
חנה	כדי למצוא מקום מסוים בסדרה צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול) ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות) כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו, ואז לחבר את המספר למספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.		$d(n-m)$ ↓ $a_m + d(n-m)$

על אף שהתלמידות עבדו יחדיו, תשובותיהן שונות מאוד: בעוד שתמר הציגה כלל שהיה ישיר ושקול לכלל $a_n = n \cdot 3 + 1$, חנה הציגה כלל ששיקף את דרך הפתרון של הסעיפים הקודמים במשימה. את ההליך של חנה אפשר להציג בסמלים: $a_n = a_m + 3(n-m)$, והוא מראה כיצד איבר מסוים של הסדרה (a_n) מחושב על סמך איבר הקודם לו העומד במקום m (האיבר a_m). כפי שאראה בהמשך, הפתרונות של תמר וחנה מייצגים את כלל התשובות שנתנו המשתתפים הבוגרים עבור משימה זו, ועל כן נבחרו לצורך הניתוח הנוכחי.

3.2. אמצעי הסימול של תלמידים עבור משתנים

בשלב זה של המחקר התלמידים טרם נחשפו לסימול אלגברי ולכן השתמשו לרוב במשתנים מילוליים או במסמנים אידאוגרפיים שרמזו על התפקיד של העצמים שעברו האחדה. רמיזה זאת נעשתה בכמה דרכים:

- חלק משמות המשתנים היו **מטאפורות** (metaphors) – אמצעי לשוני המבוסס על אנלוגיה, קשר של דמיון בין שדה סמנטי לאחר. כך למשל כאשר התלמידים כינו את האינדקס n של איבר כלשהו a_n בשם "מקום" (אמנם כותב המשימה בחר מילה זו, אך בפועל התלמידים אימצו אותה והשתמשו בה).
- שמות אחרים היו **סינקדוכות** (synecdoche)[9] – מבע לשוני המגדיר את השלם על-ידי אזכור של חלק ממנו. כך לדוגמה, חנה כינתה את האיבר a_n בשם "מקום מסוים בסדרה" ואת האיבר a_m בשם "המקום שמצאתי".
- שמות אחדים היו **סינקדוכות הפוכות**, כלומר ייצגו את החלק על-ידי השלם. למשל בביטוי של חנה "כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו", שכוונתה הייתה לציין את $n-m$, השלם "כמה שצריך להוסיף" הופיע בתפקיד של החלק שלו.
- לעתים קרובות כאשר בחרו מסמן לצורך האחדה, השתמשו התלמידים ב**גנוסים** (genus) – כלומר בקטגוריה רחבה (סוג) שאליה משתייכים העצמים שעברו האחדה. כך היה כאשר התלמידים כינו איבר בסדרה, a_n, בשם "מספר" (כותב המשימה בחר מילה זו, אך התלמידים אימצו גם אותה). במקרים אחרים חנה כינתה את ההפרש של הסדרה הנתונה, 3, בשם "חוקיות", ותמר כינתה את האינדקס של איבר, n, בשם "משהו".
- בכמה פעמים בוצעה האחדה על-ידי שימוש ב**תיאורים דאיקסיים** (deictic) – מסמנים לשוניים המראים מיקום מרחבי וזיהוי של אנשים, עצמים, אירועים ותהליכים שדובר עליהם במהלך פעולת הדיבור. מסמנים אלה הם מילים ופסוקיות המציינות את טבעו תלוי ההקשר של התיאור. למשל, כאשר חנה השתמשה בביטויים "המספר שיש לך עכשיו" ו"כמה שאתה עוד צריך".
- לבסוף, תמר השתמשה באידאוגרף ☐ שמסמן חלל פיזי השמור למספר שאינו ידוע כעת (המקום של איבר מבוקש בסדרה), אך שייכתב בעתיד. לפיכך נהוג לכנות אידאוגרף זה בשם "שומר מקום". שלא כמשתנה אלגברי, שומר מקום אינו חייב לקבל את אותו הערך בכל מופעיו.

ריבוי משמעויות: כפי שעולה מהתיאור שלעיל, השימוש המגוון והספונטני של התלמידים בביטויים השאובים מהשיח היומיומי עשוי לגרום לעתים לעמימות בשיח.

- לפעמים נעשה שימוש בשם עצם אחד עבור כמה מטרות שונות – לדוגמה, המילה "מקום"

---

[9] סינקדוכה היא סוג של *מטונימיה* (metonymy) – מבע לשוני הממחיש מושג או גורם באמצעות החלפתו בגורם אחר השייך לאותו הקשר, סיבה, חומר, יחס רעיוני או ייצוג.

שימשה הן לציון האינדקס n (אצל תמר) והן עבור האיבר a_n (אצל חנה).

- תופעה הפוכה היא כינוי עצם אחד בכמה שמות – למשל, חנה השתמשה בביטויים "המקום שמצאתי" ו"המספר שיש לך עכשיו" לציון האיבר שחושב קודם לכן – a_m.
- לבסוף השמות הגנריים, כגון "מספר", "משהו" ו"חוקיות" היו כלליים, והם עשויים להתפרש שלא כהלכה על-ידי הדוברים בשיח. כדי להתגבר על הכללות יתר, השתמשו התלמידים בתיאורים מפורטים. למשל, חנה השתמשה בביטוי "המספר שיש לך עכשיו", כשהיא הופכת את הגנוס למתאר דאיקסי. סוג כזה של פירוט, בהיותו תלוי הקשר (יש לשים לב לשימוש במילים "אתה" ו"עכשיו"), לא היה יכול למנוע ריבוי של פרשנויות.

טבלה 5a: מסמנים של עצמים, תמר – כיתה ז'

תמר **כלל נאמר וכתוב**	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות**
					האם השימוש היה נכון?
נאמרת מקום	מקום	n	מילולי	מטפורה	כן
כפול חוקיות הסדרה ועוד אחד.	חוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
משהו כפול 3 ועוד 1	משהו	n	מילולי	גנוס	לא
כתובה מקום*	מקום	n	מילולי	מטפורה	כן
חוקיות הסדרה + 1	חוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
$\square \times 3 + 1$	$\square$	n	אידאוגרפי	שומר מקום	לא

טבלה 5b: מסמנים של עצמים, חנה – כיתה ז'

חנה **כלל נאמר וכתוב***	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות**
					האם השימוש היה נכון?
כדי למצוא מקום מסוים בסדרה	מקום מסוים בסדרה	a_n	מילולי	מטָפורה	לא
צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול)	המקום שמצאת	a_m	מילולי	סינקדוכה + מתאר דאיקסי	לא
ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות)	החוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו,	כמה שצריך להוסיף	n-m	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
	למספר שיש לך עכשיו	m	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא

חנה **כלל נאמר וכתוב***	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
ואז לחבר את המספר שיש לך עכשיו	המספר שיש לך עכשיו	a_m	מילולי	גנוס + מתאר דאיקסי	כן
ואת המכפלה של	המכפלה	$d(n\text{-}m)$	מילולי	מטפורה/ מתאר מבני	כן
החוקיות	החוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.	וכמה שאתה צריך עוד.	$n\text{-}m$	מילולי	מתאר דאיקסי	לא

* הכלל הנאמר והכלל הכתוב אוחדו במקרים שבהם תלמיד שהתבקש לנסח את הכלל בעל-פה, פשוט קרא את מה שכתב.

3.3. אמצעים עבור פעלים, פעולות ותוצאותיהם[10]

הצעד המרכזי המבטיח חד-משמעיות בשיח וקיצור של נרטיבים מטה-אריתמטיים למשפטים אלגבריים פורמליים, הוא ראיפיקציה. לפיכך נשאלת בחלק זה השאלה: האם הכללים שניסחו התלמידים מתארים פעלים, כמו במקרה שדובר אומר: "אני *כופל* את a ו-b *ומוסיף* c", או עצמים, כמו במשפט: "*הסכום* של c *והמכפלה* של a ו-b". במילים אחרות, אבקש לבחון האם קיים **גרעון** בכללים של התלמידים. כמו כן אבחין בין פעלים שאנשים עושים (למשל "כפלתי את a ב-b") ופעולות הֲזָרָה שעצמים מתמטיים עושים אותן (למשל "a כפול b"). ככל שמספר השימושים בפעלים גדול יותר (בייחוד אלה שאנשים עושים), כך הכלל מעוצם פחות.

מסמנים עבור פעלים ופעולות: אחד המאפיינים של תשובות התלמידים הוא שכיחותם של אזכורים ישירים של פעלים, פעולות וכן טבעם. תשובות אלה כללו שלושה טיפוסים של מסמני פעולות:

1. **פעלים חשבוניים** – כגון "מחלקת", "מורידים", "לחלק", "להוסיף".
2. **פעלים שאינם חשבוניים** – כגון "לעשות", "להקפיץ", "מגיע", "התחלתי".
3. **פעולות חשבון** – כגון "כפול", "ועוד" וכן סמלים תואמים "×", "+".

נוסף על כך אפשר גם לסווג את תשובות התלמידים בהתאם למידת מעורבותו של המבצע האנושי:

1. **אנושי** – תשובה שבה עושה הפעולות הוא בן-אדם. למשל, הפועל "מצאת" בתשובתה של חנה.
2. **עצם מתמטי** – תשובה ללא פעולות בן-אדם, כך שהפעולות בה נעשות על-ידי עצמים מתמטיים. לדוגמה, "מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1" אצל תמר (בניגוד ל"אני כופלת את המקום בחוקיות").

כפי שעולה מטבלה 6, בשיחים של תמר וחנה זוהו שלושת הטיפוסים של פעולות: התלמידות השתמשו

---

[10] **ההבחנה בין פועל ופעולה:** *הפועל* הוא חלק הדיבר המציין פעולות או התרחשויות. לפועל יש **זמן** (עבר, הווה, עתיד) **וגוף** (מדבר/ת, נוכח/ת, נסתר/ת, מדברים/ות, נוכחים/ות, נסתרים/ות). *פעולה* אינה בעלת זמן או גוף (לדוגמה: "הליכה", "דיבור") ולפיכך **אינה** פועל.

בפעלים, כגון "לחבר", "מצאת", וכן בפעולות חשבון כגון "ועוד" או "כפול". יתרה מזו, בעוד שהכלל של חנה עוסק בפעולות אנושיות, הרי שתמר לא הזכירה אנשים בתשובתה.

טבלה 6: מתארים של פעולות ותוצאותיהן, תמר וחנה – כיתה ז'

תגובה		פעולות			מבצע	תוצאות			סדר הפעולות נשמר?	מצב אונטולוגי כללי (רמה)
שם	טיפוס	פעלים חשבוניים	פעלים שאינם חשבוניים	פעולות חשבון		הצגה	פונקציה	טיפוס		
תמר	כתוב			×, +, •	עצם	מקום כפול חוקיות הסדרה $\square\times3+1$	$3n+1$ a_n	באמצעות פסוקית פעולה	כן	2 כמעט מגורען
	נאמר			כפול, ועוד	עצם	מקום כפול החוקיות ועוד אחד	$3n+1$ a_n	באמצעות פסוקית פעולה	כן	2 כמעט מגורען
חנה	כתוב ונאמר	לחבר, להוסיף	למצוא, מצאת	כפול	אנושי	המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך	$d\times u$ כאשר $u=n-m$	באמצעות נומינליזציה	כן ולא (קודם הציגה גרעון במונחים תהליכיים)	2 כמעט מגורען

מסמנים עבור תוצאות של פעולות: כאשר כלל מכיל סדרת פעולות, נשאלת השאלה: באילו אמצעים משתמש מציג הכלל כדי לבטא תוצאות ביניים שעליהן מבוצעות פעולות נוספות? כאמור שיחים מתמטיים מפותחים מאפשרים שתי שיטות לטיפול בתוצאות ביניים.

הצגה על-ידי פסוקית פעולה: השיטה הראשונה לבעיה של תוצאות הביניים היא לא להציגן כלל, כמו למשל בכלל של תמר: "המקום כפול החוקיות של הסדרה ועוד אחד" (כלל סימבולי: $n\cdot3+1$). כאן לא נאמר דבר מפורש על תוצאת ביניים, כלומר על התוצאה מיישום החלק הראשון של הכלל, "מקום כפול חוקיות הסדרה". התיאור ממשיך בהצגת הפעולה הבאה "ועוד אחד". בלי שהדבר ייאמר, ברור שפעולה נוספת זו מיושמת על התוצאה של כל החישובים שנעשו עד כה.

השאלה הנשאלת כעת היא: האם עלינו לפרש את הפסוקית המורכבת "המקום כפול החוקיות של הסדרה" כתיאור של פעולה או כעצם מציין? התחביר אינו מספק תשובה חד-משמעית, שכן המילה "כפול" היא אינה שם עצם ואינה פועל.[11] לעומתו הביטוי "מקום כפול החוקיות של הסדרה" מתפקד כ- a בביטוי "a ועוד אחד", ולכן בשל פונקציה תחבירית זו הוא יכול להיחשב כמסמן של עצם.

תשובה אפשרית על שאלה זו נקבל מתוך בחינת סדר הפעולות בכללים של התלמידים. כל עוד התלמיד מציג את המילים המזכירות פעולות לפי הסדר שעליהן להיעשות, הסיכויים הם שהוא מחשיב מילים אלה כמסמנים של פעולות במקום כתוצאות של פעולות. נראה כי הכלל של תמר: "מקום כפול החוקיות של הסדרה ועוד אחד" אכן שומר על הסדר שבו מתבצעות הפעולות בעת החישוב. העובדה

---

[11] ילדים משתמשים לעתים במילים "כפול" או "ועוד" כחלק מפסוקית פועל, למשל: "אני עושה ועוד פה". מכל מקום תופעה זו אינה רלוונטית לניתוח הנוכחי כיוון שהשימושים בפעלים לכאורה אינם יכולים להופיע בביטויים שמציגים **תוצאה** של חישוב.

שתמר טרם עשתה ראיפיקציה לביטויים מעין אלה נתמכת על-ידי ניסוחה התהליכי בקביעת הכלל: תמר אומרת "אז אתה **עושה** את המקום כפול שלוש ועוד אחד". לעומת זאת, כאשר תלמיד אומר: "אחד ועוד מקום כפול החוקיות של הסדרה" (השקול ל- $1+n\cdot 3$), הסבירות של ראיפיקציה גדלה במידה ניכרת. ניסוח אחרון זה מרמז על כך שאחרי קריאת שתי המילים הראשונות של הכלל, "אחד ועוד", המבצע חייב להפסיק, לחשב את $n\cdot 3$, ורק אז לחזור לכלל ולהשתמש בתוצאה כמחובר. לכאורה הצגה זו הייתה יכולה להיות "טבעית יותר" כיוון שהיא משקפת טוב יותר את התהליך שלפיו התלמידים מצאו את החוקיות מלכתחילה: על-ידי התקדמות מהאיבר הראשון של הסדרה לאיבר שחיפשו אותו.

הצגה על-ידי נומינליזציה: השיטה השנייה היא נומינליזציה – תהליך שבו פעלים (או חלקי דיבור אחרים) הופכים לשמות עצם. לדוגמה, בביטוי של חנה "המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך", שם העצם "מכפלה" הוא נומינליזציה של שם הפועל "להכפיל". הסמן הראשון המעיד כי ביטוי זה מייצג תוצאה (ולא פעולה) הוא היותו פסוקית שם עצם. כאשר משלבים אותו בתוך משפט גדול יותר ("לחבר את המספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך"), הביטוי מתפקד כשם עצם. סממן נוסף לשימוש הראיפיקטיבי של הביטוי "המכפלה של ..." הוא במיקומו בתוך המשפט: הופעתו כמחובר שני מלמדת על היותו תוצאה של חישוב שהיה צריך להתבצע מראש.

3.4. רמת השיח

הופעתה של הנומינליזציה בכלל של חנה משקפת את התקדמות השיח שלה לעבר ראיפיקציה. לנומינליזציה זו חשיבות יתרה בתהליך הפורמליזציה של השיח המטה-אריתמטי, שכן היא דורשת הכרה בטבעם התהליכי/מעוצם של ביטויים אלגבריים. אולם השימוש הנוכחי בנומינליזציה אינו משמש ראיה מספיקה לכך שהתרחשה ראיפיקציה מלאה. למשל, ייתכן שחנה קיבלה ביטוי מסוים זה מדוברים אחרים לפני שיכלה לחשוב עליו במונחים של עצם.

גם לכלל של תמר ישנן כמה תכונות המאפיינות מטה-אריתמטיקה פורמלית, וזאת ללא תלות בשאלה האם מבחינתה ביטוי כגון "מקום כפול חוקיות הסדרה" מציין עצם או לא. ראשית, תמר השתמשה בפעולות החשבון "פלוס" ו"כפול" ועל כן ניסחה כלל שאינו מבוצע על-ידי אנשים. שנית, אם נבקש לתרגם את הביטוי של תמר לאידאוגרפים, לא נצטרך לבצע אף לא שינוי מבני אחד: תרגום מילה במילה ייתן את הביטוי הקנוני: $n\times d+1$ (תמר התקרבה לתוצאה זו כאשר כתבה את הכלל שלה בצורה $\square\times 3+1$).

לסיכום, מתוך הניתוחים שהוצגו עד כה, עולה כי שתי התלמידות הבוגרות מתקדמות לרמה השנייה, הרמה המגורענת של השיח האלגברי. ממצאים אלה שיאוששו בהמשך כניתנים להכללה, הפתיעו אותי. מתוכם נלמד כי שיח מטה-אריתמטי מובנה היטב יכול להתפתח התפתחות ספונטנית, עוד לפני פגישתם הראשונה של התלמידים עם האלגברה הבית-ספרית. לנוכח הפתעה זו, החלטתי להרחיב את

המחקר לאלתר ולהציג כמה מהמשימות לפני קבוצה של תלמידים צעירים בכיתה ה'.

את הממצאים בקרב המשתתפים בכיתה ה' אציג להלן מתוך השוואה מתמדת בין השיח המטה-אריתמטי של התלמידים הצעירים ובין שיח זה בקרב המשתתפים הבוגרים.

4. ממצאים - שיח אלגברי בלתי-פורמלי של התלמידים בכיתה ה׳

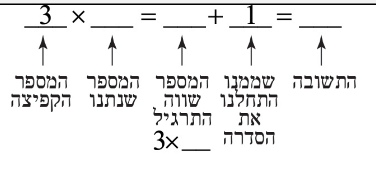
4.1. דוגמאות - תיאור כללי

בדומה לבוגרים, בחרתי שתי תשובות של תלמידות צעירות. לאחר ניתוח חוצה זוגות של תשובות הצעירים, הבחנתי כי תשובותיהן של שתי התלמידות עבור משימת ההכללה (ראה טבלה 2) מייצגות את כלל התשובות שניתנו בקרב קבוצה זו. הפעם כל אחת משתי התלמידות, איילת וקרין, השתייכו לזוג עבודה אחר.

מקריאת התשובות (ראה טבלה 7) מתקבל הרושם כי אין הבדל מהותי בין ההליכים החישוביים של התלמידים הצעירים ובין אלה שביצעו המשתתפים הבוגרים. החישוב של איילת שקול לזה של תמר ואילו ההליך של קרין שקול לזה של חנה. יתרה מזו, לתשובתה של איילת יש צורה נוסחתית המזכירה את הכלל השני שהציגה תמר $(\square\times3+1)$, והכלל של קרין דומה באופיו המילולי לכלל של חנה.

ובכל זאת, בחינה מדוקדקת אחרת תחשוף מיד הבדלים משמעותיים. תחילה, הכללים של התלמידים בכיתה ה' ארוכים יותר: איילת הזדקקה ל-21 מילים לעומת שבע מילים בכלל של תמר; קרין השתמשה ב-62 מילים לעומת 46 מילים אצל חנה. הסיבות להכברה במילים בקרב התלמידים הצעירים תעשינה ברורות כאשר אבחן מאפיינים אחרים בשיחים של הצעירים והבוגרים.

טבלה 7: כללים של תלמידים בכיתה ה' – איילת וקרין.

שם	כלל כתוב	כלל נאמר	כלל שקול
איילת		צריכים לעשות את המספר שידוע לנו, כמו 75 כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו, ואז זה יהיה שווה משהו – כאילו את המספר של 3 כפול מה שזה לא יהיה, ואז אנחנו צריכים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחלנו להקפיץ את זה, ואז זה יהיה שווה התשובה.	$3\times n+1=a_n$
קרין		צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה (16) (החמישי בסדרה). אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא (העשרים בסדרה). אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה למקום שאתה צריך להגיע (15 = 20-5) אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת (45 = 15×3). בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה (61 = 45+16).	$d(n-m)$ $-$ $r\times3+a_m=a_n$

4.2. אמצעי הסימול של תלמידים עבור משתנים

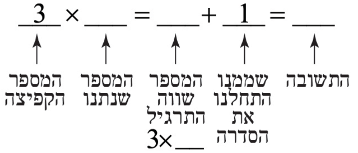
השוואה בין טבלאות 5a ו-5b לטבלאות 8a ו-8b חושפת קווי דמיון רבים בבחירות שעשו הבוגרים והצעירים במסמנים עבור משתנים. איילת וקרין השתמשו במילים מוכרות שהומרו למשתנים בהתאם לתפקידם. ההמרה הושגה באמצעות בחירה של מסמן מילולי או אידאוגרפי הקשור לעצמים שעברו האחדה (saming). שיטות ההמרה שזוהו הן אלה שנמצאו בקרב הבוגרים: מטפורה, סינקדוכה, סינקדוכה הפוכה, גנוס ותיאור דאיקסי. התלמידים הבוגרים והתלמידים הצעירים עשו שימוש מצומצם באידאוגרפים ששימשו כשומרי מקום. עם זה בכללים של התלמידים הצעירים זוהו שתי תופעות שלא נראו קודם לכן:

- קרין השתמשה במספרים ספציפיים כמשתנים כדי להדגים את ההליך הכללי (דוגמה גנרית).
- מילים מיוחדות הוצגו כמשתנים עבור תוצאות ביניים או עבור תוצאות סופיות (איילת: "המספר ששווה לתרגיל $3\times$___" עבור dn, ו"התשובה" עבור a_n; אצל קרין: "התוצאה המתקבלת" עבור $n-m$, ו"המספר שיצא" עבור $(n-m)d$).

ריבוי משמעויות: בדומה לשיח הבוגרים, גם הכללים של התלמידים הצעירים היו מרובי משמעויות: שם עצם אחד שימש עבור מספר מטרות ("איזה מקום אתה רוצה" שימש את קרין הן עבור n והן עבור a_n); עצם אחד סומן במספר דרכים (איילת השתמשה ב"מספר שידוע לנו ומה שזה לא יהיה" עבור n); והשימוש הנרחב בסינקדוכות, בגנוסים ובמתארים דאיקסיים השאיר מקום רב לפרשנויות מוטעות.

טבלה 8a: מסמנים של עצמים, איילת – כיתה ה'

איילת **כלל נאמר וכתוב**	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	**שקול פונציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
נאמרת צריכים לעשות את המספר שידוע לנו,	המספר שידוע לנו	n	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
כמו 75	75	n	אידאוגרף	הדגמה	כן
כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו,	מספר הקפיצה	d	מילולי	מטפורה + גנוס	לא
ואז זה יהיה שווה משהו –	משהו	nd	מילולי	גנוס	לא
כאילו את המספר של 3 כפול מה שזה לא יהיה,	מה שזה לא יהיה	n	מילולי	מתאר דאיקסי	לא
ואז אנחנו יכולים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחילו להקפיץ את זה,	את ה-1 – שכאילו ממנו התחילו להקפיץ את זה	a_0	מילולי	קבוע + מתאר דאיקסי	כן

אילת כלל נאמר וכתוב	מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	שקול פונקציונלית ל...	טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)	הקשר למסמנים	ריבוי משמעויות האם השימוש היה נכון?
ואז זה יהיה שווה התשובה.	התשובה	a_n	מילולי	גנוס	לא
כתובה 	מספר הקפיצה (3)	d	מילולי/ אידאוגרפי	מטפורה	לא
	המספר שנתנו	n	מילולי/ אידאוגרפי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
	המספר; התרגיל ×3	nd	מילולי/ אידאוגרפי	גנוס	לא
	שממנו התחילו את הסדרה (1)	a_0	מילולי/ אידאוגרפי	קבוע + מתאר דאיקסי	כן
	התשובה	a_n	מילולי/ אידאוגרפי	גנוס	לא

טבלה 8b: מסמנים של עצמים, קרין – כיתה ה'

קרין כלל נאמר וכתוב*	מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	שקול פונקציונלית ל...	טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)	הקשר למסמנים	ריבוי משמעויות האם השימוש היה נכון?
צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה	המספר הכי גבוה שאתה רואה	a_m	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(16) (החמישי בסדרה).	16	16, a_5	אידאוגרף	הדגמה	כן
אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא	מקום שאתה רוצה למצוא	a_n	מילולי	סינקדוכה + מתאר דאיקסי	לא
(העשרים בסדרה).	העשרים	a_{20}	מילולי	הדגמה	כן
אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה	המקום הכי גבוה	m	מילולי	מטפורה + מתאר דאיקסי	כן
למקום שאתה צריך להגיע	למקום שאתה צריך להגיע	n	מילולי	מטפורה + מתאר דאיקסי	כן
(20-5=15)	15, 5, 20	$n, m, n-m$	אידאוגרף	הדגמה	כן
אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת	התוצאה המתקבלת	$n-m$	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(15×3=45)	15, 3, 45	n-m, d, (n-m)·d	אידאוגרף	הדגמה	כן
בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא	המספר שיוצא	$(n-m)\cdot d$	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה	המספר שאתה רואה הכי גבוה	a_m	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(45+16=61).	45, 16, 61	$(n-m)\cdot d$, a_m, a_n	אידאוגרף	הדגמה	כן

* הכלל הנאמר והכלל הכתוב אוחדו במקרים בהם תלמיד אשר התבקש לנסח את הכלל בעל-פה פשוט קרא את שכתב.

4.3. אמצעים עבור פעלים, פעולות ותוצאותיהם

מסמנים עבור פעלים ופעולות: השוואה מדוקדקת בין טבלאות 6 ל-9 מגלה מספר הבדלים בין שיח הבוגרים לבין שיח הצעירים בדרך טיפול בפעלים ובפעולות.

- בקרב התלמידים הצעירים רוב הפעלים אינם חשבוניים (למשל, "להתחיל", "ראיתי", "רוצה", וזאת לעומת הפועל היחיד "למצוא" בכללים של הבוגרים). שימוש נרחב זה מלווה בהישענות גדולה יותר של הצעירים על תיאורים דאיקסיים הקושרים בין המשתנים, פעולות, כוונות ורצונות של הדובר. לפיכך בכללים של התלמידים הצעירים בולט המבצע האנושי.
- סדר הפעולות בכללים של התלמידים הצעירים זהה לסדר שבו פעולות אלה מבוצעות במהלך החישוב (שלא לפי הכלל של חנה שבו הפעולות מופיעות בסדר שאינו תואם את סדר ביצוען).

מסמנים עבור תוצאות של פעולות: ההבדל המובהק בין השיחים של הבוגרים לצעירים מצוי בדרך הטיפול בתוצאות הביניים של חישובים מורכבים.

- איילת וקרין לא השתמשו בפסוקיות פעולה או בנומינליזציה לצורך הצגת תוצאות הביניים, כפי שעשו תמר וחנה. במקום זאת, שתיהן הציגו שמות עצם מציינים חדשים (מילים מיוחדות עבור תוצאות ביניים כגון "התוצאה" או "התשובה") וכן אידאוגרפים (כגון קו ריק).
- בשל השימוש בשמות מיוחדים עבור תוצאות ביניים, הצליחו הצעירים לשמור על הפרדה ברורה בין הפעולות לתוצאותיהן. הדבר ניכר בהצגה האידאוגרפית של איילת שבה סימן השוויון מתפקד כפעולת "בצע" במחשבון ולא כסימן המבטא שקילות (הוראת "עשה משהו", כפי שמופיעה אצל קיארן [Kieran, 1981]). הביטוי המופיע משמאל לסימן השוויון מציין פעולה ואילו הביטוי מימין מציין את התוצאה. למעשה כדי להמיר את האידאוגרף של איילת למבנה השקול לביטוי האלגברי $3n+1$, די למחוק את זוג הסמלים " ___ = " המופיעים משמאל למספר 1. מחיקה זו, גם אם היא פשוטה לביצוע מבחינה טכנית, כרוכה בקפיצה מחשבתית עצומה, שכן היא קשורה לדואליות תהליך/עצם של הביטוי.
- שלא כבוגרים, מבני הכללים של הצעירים לא היו קרובים לביטויים האלגבריים הקנוניים $a_m+(n-m)d$ או $3n+1$. סדר הפעולות בכללים של הצעירים תאם את סדר ביצוען בעת החישוב.

4.4. רמת השיח

הכללים של איילת וקרין כוללים פעולות שבני-אדם עושים, סדר הפעולות בהם תואם את סדר ביצוען והם אינם מכילים פסוקיות פעולה (ולפיכך גם לא פסוקיות שם עצם). בשל מאפיינים אלה, הכללים הם תהליכיים ואינם מכילים סממנים של גרעון, ולכן מתאימים לרמה הראשונה במודל ההתפתחות של השיח האלגברי (ראה לעיל טבלה 1).

טבלה 9: מתארים של פעולות ותוצאותיהן, איילת וקרין – כיתה ה'

תגובה		פעולות			מבצע	תוצאות			סדר הפעולות נשמר?	מצב אונטולוגי כללי (רמה)
שם	טיפוס	פעלים חשבוניים	פעלים שאינם חשבוניים	פעולות חשבון		הצגה	פונקציה	טיפוס		
איילת	כתוב		נתנו, התחלנו	×, +	עצם/ אנושי	המספר שווה התרגיל ______×3	nd	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
	נאמר	להוסיף	לעשות, צריכים, התחלנו, להקפיץ	כפול	אנושי	משהו התשובה	nd	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
קרין	כתוב נאמר	כופל, מחבר	להתחיל, רואה, לראות, למצוא, עושה, להגיע, לוקח, רואה	×, +, -	אנושי	התוצאה המקבלת	n-m	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
						המספר שיוצא	$(n-m)d$	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי

5. שיח אלגברי בלתי-פורמלי של כלל התלמידים בכיתה ז׳ ובכיתה ה׳ - סיכום השוואתי

בחלק זה של המאמר אשווה בין השיחים המטה-אריתמטיים של כלל התלמידים הבוגרים והצעירים. הנתונים שאתבסס עליהם לקוחים מתוך התשובות הכתובות והנאמרות של התלמידים בסעיף ג' של המשימה שהוצגה בטבלה 2. עיון מדוקדק בתשובות של כלל המשתתפים מראה כי את הממצאים שהוצגו עבור תמר, חנה, איילת וקרין אפשר להכליל כמייצגים של שתי קבוצות המשתתפים. שיח הבוגרים ושיח הצעירים נמצאו דומים בהיבטים רבים: בשניהם נעשה שימוש בשמות עצם מוכרים מהשיח היומיומי, והתלמידים קישרו את המשתנה לתפקידו באותם אמצעים של האחדה, דבר שהביא לידי שיח שאינו חד-משמעי. יתרה מזו, ברוב הכללים שהציגו הבוגרים והצעירים הופיעו הפעולות בסדר התואם את סדר ביצוען.

אולם בשיח של התלמידים הבוגרים והצעירים נמצאו בכל זאת מאפיינים מסוימים שבלטו יותר באחת מהקבוצות. מאפיינים אלה שאציג מיד, עשויים ללמד אותנו כיצד משתנה השיח המטה-אריתמטי במעבר מכיתה ה' לכיתה ז'.

אך תחילה אבקש לציין ממצא כללי הנשען על פתרונות שהציעו המשתתפים. על אף שהמשימה כרוכה בהכללה אלגברית ולפיכך עשויה לחרוג מיכולותיהם של תלמידים שטרם נחשפו לאלגברה הבית-ספרית, רוב הצעירים וכל הבוגרים הציעו פתרונות שאפשר לסווגם כנכונים (ראה טבלה 10). המשתתפים הציעו כללים משני סוגים: הראשון שקול מבנית לצורה $3n+1$ והשני לצורה $a_n=a_m+(n-m)d$.

הממצאים שעלו מתוך ניתוח הנתונים אוגדו בטבלאות 10 ו-11. ממצאים אלה חושפים הבדלים מהותיים בין השיח של המשתתפים בכיתה ז' ובין השיח של התלמידים בכיתה ה'.

- הכללים של התלמידים הבוגרים היו קצרים ודחוסים יותר מאלה של הצעירים.
- **התלמידים הבוגרים והצעירים סימנו משתנים על-ידי שמות עצם מוכרים.** סימון זה נעשה באותם אמצעים עבור האחדה תוך קישור המשתנה לתפקידו: מטפורה, סינקדוכה, סינקדוכה הפוכה או גנוס המשולב עם תיאורים דאיקסיים.
- **משתנים אחרים שזוהו בשיח של התלמידים הצעירים והבוגרים היו אידאוגרפים בתפקיד של שומרי מקום (קו ריק או ריבוע ריק).** סימון זה נמצא שכיח יותר בקרב הבוגרים (שני מופעים בקרב הצעירים לעומת חמישה בקרב הבוגרים). שני בוגרים כתבו: $\square\cdot 3+1=\square$ ואחד מהם אף המחיש זאת בכתיבת המספר 50 בריבוע השמאלי ו-151 בריבוע הימני. תלמיד אחר כתב: $x\cdot 3+1=x$. ככל הנראה, שימוש זה נבע משימוש קודם בריבועים המציינים חלל פיזי עבור מספרים (שומרי מקום).

טבלה 10: תכונות הכללים של המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז'

		כיתה ה' (N=10)	כיתה ז' (N=10)
כלל (פתרון)	$3n+1$	4	8
	$a_n = a_m + (n-m)d$	3	2
	שגוי	3	0
כלליות	ללא הכללה (שימוש בשם מספר עבור משתנה)	2	1
	הכללת יתר (שימוש ב-d או במילה "חוקיות" במקום במספר 3)	3	1
אורך ממוצע (מספר מילים)	כתוב	49.25 (SD=28.45)	29.5 (SD=17.94)
	נאמר	52.75 (11.04)	33.0 (16.58)
שימוש באידאוגרפים	קו ריק או ריבוע ריק	2	5

* N מציין את מספר התשובות שהציגו המשתתפים הבוגרים והצעירים.

- **התשובות של התלמידים הבוגרים היו ממוקדות פחות בתהליכים לעומת התלמידים הצעירים**. הדבר ניכר בכמה דרכים: ראשית, בשימוש המצומצם שעשו הבוגרים בפעלים חשבוניים כגון "הוספתי", "לכפול" (בממוצע 3.4 פעלים בתשובת בוגר לעומת 5.5 בתשובת צעיר) וההישענות הנרחבת שלהם על פעולות חשבון כגון "ועוד" ו"כפול" (בממוצע 3.2 שימושים בתשובת בוגר לעומת 0.5 בתשובת צעיר). שנית, השימוש המופחת של הבוגרים בפעלים שאינם חשבוניים כגון "כתבתי", "סימנתי" (בממוצע 2.2 פעלים בתשובת בוגר לעומת 4.9 בתשובת צעיר) וכן במילים המציינות התקדמות בזמן (בממוצע 0.3 מילים בתשובת בוגר לעומת 1.5 בתשובת צעיר). לבסוף, בעוד ש-90% מתשובות הצעירים נוסחו כאנושיות, רק 55% מתשובות הבוגרים נוסחו כאנושיות. נומינליזציה נמצאה בקרב תלמידה בוגרת אחת בלבד (המילה "מכפלה" בכלל של חנה).

- כדי להתמודד עם תוצאות ביניים, השתמשו התלמידים הבוגרים והצעירים במילים מיוחדות (למשל: "התוצאה", "התשובה", "משהו"), היוצרות הפרדה ברורה בין ההליך החישובי לתוצאתו. אולם תופעה זו נמצאה שכיחה יותר בקרב הצעירים (בממוצע פי 4 יותר בתשובת צעיר). התלמידים הבוגרים השתמשו לרוב בפסוקיות פעולה שבהן פעולות חשבון המציינות הן פעולות והן את תוצאותיהן, ולפיכך מבטלות את הצורך בהפרדה זאת (בממוצע שימוש זה בתשובת בוגר היה גדול פי 6 מאשר בתשובת צעיר). לאור השימוש בפסוקיות פעולה אלה, התשובות של התלמידים הבוגרים היו קרובות יותר בתחבירן לאידאוגרפים אלגבריים, לעומת תשובותיהם של המשתתפים הצעירים. הופעתן של פסוקיות אלה היא סממן של גרעון שעתיד להביא בסופו של דבר לידי שיח אלגברי מעוצם.

טבלה 11: תכונות של השיח בקרב המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז'

		כיתה ה' (N=20)	**כיתה ז' (N=20)***
מסמנים של פעולות	**ממוצע של פעלים חשבוניים לתשובת תלמיד**	5.5	3.4
	ממוצע של פעלים שאינם חשבוניים לתשובת תלמיד	4.9	2.2
	ממוצע של פעולות חשבון לתשובת תלמיד	0.5	3.2
המבצע	**אנושי**	18 (90%)	11 (55%)
	עצם מתמטי	2 (10%)	9 (45%)
ממוצע של מילים מיוחדות עבור תוצאות ביניים לתשובת תלמיד		1.6	0.4
ממוצע של מילים המתארות התקדמות בזמן לתשובת תלמיד		1.5	0.3
הצגה של תוצאות ביניים	**פסוקית פעולה**	5	32
	נומינליזציה	0	1
שינוי סדר הפעולות		0	2

* N הוא המספר **הכולל** של תשובות כתובות ונאמרות שהציגו התלמידים הבוגרים והצעירים.

לסיכום, בעוד שהשיח המטה-אריתמטי של כלל המשתתפים רחוק עדיין משיח אלגברי מפותח, דומה שהשיח האלגברי הבלתי-פורמלי של התלמידים הבוגרים מפותח יותר משל התלמידים הצעירים. על סמך קביעה זו אוכל לטעון כי התלמידים הבוגרים נמצאים על סיפה של רמה 2 של מודל ההתפתחות של השיח האלגברי (מגורענת), ואילו המשתתפים הצעירים עדיין לא עברו את רמה 1 (תהליכית).

6. דיון ומסקנות

הנתונים שהוצגו מראים הבדלים ניכרים בין השיחים המטה-אריתמטיים של התלמידים הבוגרים והצעירים. האלגברה הבלתי-פורמלית של הבוגרים דחוסה יותר ונראה שמעוצמת יותר, ולפיכך קרובה יותר מבחינה תחבירית לאלגברה הפורמלית. ואולם אין לדעת האם התלמידים הבוגרים שהציעו ביטויים "מגורענים" אכן חשבו על פסוקיות שם עצם, כלומר האם התכוונו לתוצאה של החישוב ולא לחישוב עצמו. על אף שחלק מהבוגרים מסוגלים להשתמש בתחביר שמאפשר ביטויים

מורכבים יותר, אני סבור שזהו אך צעדם הראשון לעבר ראיפיקציה.

מטרתו של שלב התחלתי זה של המחקר הייתה ללמוד על דרך התפתחות השיח המטה-אריתמטי של תלמידים עוד לפני שנחשפו ללימודי האלגברה הפורמלית בכיתה. העובדה שהתלמידים הצליחו להשתתף בשיח מטה-אריתמטי מלמדת כי מטה-אריתמטיקה ספונטנית מתחילה להתפתח שנים לפני הצגתה הפורמלית של האלגברה בבית הספר.[12] גם ללא למידה או קבלה של תשומת-לב ישירה, השיח המטה-אריתמטי של הילדים עשוי לעבור תמורות משמעותיות, ולהיות קרוב בתחבירו לשיח האלגברי הפורמלי של בית הספר.

בעוד שציפיתי כי תתרחש התפתחות מסוימת בשיח המטה-אריתמטי בין כיתה ה' לכיתה ז', מידת השינוי הפתיעה אותי. על סמך המחקר שתואר אצל ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), שיערתי בדומה לאחרים שהשיח המטה-אריתמטי של התלמידים יתמקד בתהליכים יותר מאשר בעצמים. בשל ציפייה זו ניסחתי את המשימות בשני הסבבים הראשונים בשפה תהליכית. לדוגמה שאלתי על הכלל לחישוב של איבר כלשהו של הסדרה במקום לשאול מהו האיבר הכללי של הסדרה. על אף שהציפייה שלי לשיח תהליכי הוכחה כמוצדקת, מצאתי גם קווי דמיון מבניים יוצאי דופן בין השיח המטה-אריתמטי המילולי של התלמידים והשיח האלגברי הפורמלי המעוצם.

אוכל לתת שני הסברים אפשריים לממצא זה: ראשית, מבנים של נוסחאות אלגבריות אינם שונים מאלה של ביטויים אריתמטיים, ולכן ייתכן שהתלמידים מתבססים על היכולת האריתמטית המתפתחת שלהם; שנית, ייתכן כי בימים אלה השיח האלגברי נמצא "באוויר": אלמנטים של שיח אלגברי עשויים להימצא בשיחים אחרים של בית הספר הרבה לפני הצגתה של האלגברה הפורמלית בכיתה ז'. יתרה מזו, ייתכן שצורות ביטוי אלגבריות חדרו לשיחים היומיומיים. אלה כמובן רק השערות שלתיקופן נדרש מחקר מקיף על התפתחותו המוקדמת של השיח האלגברי הבלתי-פורמלי.

אמנם מאמר זה מתאר רק את השלב ההתחלתי במחקר אורך, אך אני סבור כי הממצאים שהוצגו בו הם בעלי ערך בהערכת מידת תקפותן של שתי הרמות הראשונות במודל התפתחות השיח האלגברי (ראה סעיף 1.2.). ראשית, ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם התאוריה: התלמידים בכיתה ה' נמצאים ברמה התהליכית ואילו התלמידים בכיתה ז' נושקים לרמת המגורענת. שנית, בהסתכלות מקרוב על תהליכי השיח האלגברי, זיהיתי תהליכים ברורים שתלויים בשיח עצמו, יותר מאשר בתכונות הייחודיות של המשתתף בשיח או באופן שבו המורות בכיתה ואני עודדנו התפתחות זו. בין התופעות הנובעות ממבנה השיח עצמו יש למנות, למשל, שינויים בשיח שחייבים להיעשות בסדר מסוים (כמו שגג הבית יכול להיבנות רק אחרי שנבנו כל הקומות). ובכל זאת יש לראות במודל השערה שעשויה להשתנות בשל ממצאים אחרים ובקרב אוכלוסיות אחרות החשופות לתהליכים אחרים.

מחקר זה נושא עמו מסר למלמדים אלגברה בבית הספר. על סמך המודל שבניתי והממצאים שקיבלתי,

---

[12] אדגיש שוב כי התפתחות ספונטנית אינה עניין של התפתחות "טבעית" של "בשלות" התלמידים (Radford, 2011). אני טוען כי מדובר בבשלותו של השיח, אשר באמצעות יחסי-גומלין חברתיים נורמליים, עשוי להתפתח בטבעיות.

אוכל לגבש נתיב מבטיח להוראת האלגברה הפורמלית: המורה תציג לתלמידיה משימות כדי ליצור פורמליזציה הדרגתית של השיח המטה-אריתמטי הטבעי שלהם. תחילה היא תעורר את השיח הספונטני של התלמידים. לאחר זמן מה, המורה עשויה לסייע לתלמידיה להכיר בפגמים הקיימים בפתרונות הייחודיים שהציעו, דבר שיתווה את המסלול לשיח פורמלי. המשך התהליך ייעשה דרך שיטה בשני מישורים: טיפוח השיח המטה-אריתמטי הספונטני של התלמידים, ובתוך כך עידוד התלמידים להשתתף בשיח האלגברי הפורמלי.

ההחלטה להצמיח את השיח הפורמלי מתוך השיח הבלתי-פורמלי מקבלת תמיכה מכל הזרמים והגישות הגורסים כי ידע חדש צומח מתוך ידע קיים. אך מעל לכול התמיכה לכך מגיעה מהאבחנה שעשה ויגוצקי במושגים "יומיומיים" (בלתי-פורמליים, ספונטניים) ו"מדעיים" (פורמליים) (Vygotsky, 1987), ומהטענה הנגזרת ש"אם שתי הצורות אינן "מתחברות", אזי התפתחות אמיתית של המושג אינה מתרחשת" (Daniels, 2007, p. 314). נראה שלגישת ההוראה שהצעתי יש שני יתרונות ברורים: 1. לתהליך זה יש סיכוי טוב להיראות הגיוני בעיני התלמידים ולעורר בהם מוטיבציה ללמידה; 2. אחרי שהכירו בחולשות של השיח הספונטני שלהם בעצמם, התלמידים עשויים להיות מודעים היטב לפעולות שהם מבצעים ולסיבות המניעות אותם. לגישת הוראה זו יש את היכולת להבטיח את ההמשכיות בין השיחים המוכרים לתלמיד לאלה שהוא עדיין אינו שולט בהם. כך מצטמצמת הסכנה של למידה ריטואלית שבה הלומד רואה את השיח האלגברי כ"שיח עבור אחרים".

חשוב שנכיר את המקורות שעמם התלמידים מגיעים לכיתות האלגברה. ככל שנדע יותר על מקורות אלה, כך יגדלו הסיכויים לעזור להם בסגירת הפער שבין המטה-אריתמטיקה הספונטנית שלהם לאלגברה הפורמלית הנלמדת בבית הספר. מעל לכול אנו זקוקים לידע זה כדי להיות מסוגלים לשמור על הקשר רב-החשיבות שבין שני השיחים האלה.

רשימת מקורות

כספי, ש' (2014). **התפתחות השיח האלגברי בקרב תלמידים בחטיבת-הביניים** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת חיפה.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2004). An investigation of beginning algebra students’ ability to generalize linear patterns. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, p. 286). Bergen, Norway: Bergen University College.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Daniels, H. (2007). Pedagogy. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), *The Cambridge Companion to Vygotsky* (pp. 307-331). Cambridge: Cambridge University Press.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

de Lima, R. N., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3-18.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 191-228.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. C. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (pp. 39-285). New York: Plenum Press.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,49*(3), 372-402.

ד"ר שי כספי

סיים לימודי דוקטורט בנושא 'התפתחות השיח האלגברי של תלמידים בחטיבת הביניים', בהנחייתה של פרופ' אנה ספרד מאוניברסיטת חיפה.

מורה למתמטיקה בתיכון "חוגים" בחיפה.

מרצה במכללת אורנים.